التعريف الجديد لعملية vec للمصفوفات

features of vec operation of matrices.

الاسم : حسين علي محمد الشريفي
كلية التربية / القسم : الرياضيات / جامعة كربلاء
العنوان البريدي : hussein7712a@yahoo.com
الأسم : سامي داود كبارة
كلية العلوم / القسم : الرياضيات / الجامعة : المستنصرية

المستخلص :
في هذا البحث استفدنا من بعض التعاريف الرياضية منها:-
تعريف ضرب كرونكر للمصفوفات مع بعض خواص هذه العملية ؛اثر المصفوفة وبعض خواص هذة العملية وكذلك التعريف الجديد لعملية vec لبرهنة بعض خواص عملية vec للمصفوفات

Abstract :

In this project we took advantages of some mathematical definitions ,such as; the definitions of the kronecker products of Matrices and some features of this operations ,The Trace of a Matrix and some features of this operations .Also ,we have get the new definition of vec operation to prove some features of vec operation of matrices.

المقدمة :

اثر المصفوفة 1.1 The Trace of a Matrix

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفه مربعة من الدرجة $s\times s$ ينتمي الى حقل الاعداد الحقيقيه يعرف اثر المصفوفه A (يكتب trA) علىانه .

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{s}(a_{ii})$$

خواص اثر المصفوفة :

لتكن $A=(a_{ij})$ من الدرجة $m\times n$ و $B=(b_{ij})$ من الدرجة $n\times p$ و $C=(c_{ij})$ من الدرجة $m\times q$ ثلاث مصفوفات فأن :

1.1.1 $tr(A)=tr(A^T)$

$$trAB^T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=trB^TA=trA^TB=trBA^T \qquad 1.1.2$$

$$trAA^T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a^2{}_{ij}=trA^TA \qquad 1.1.3$$

$tr(ABC)=tr(CAB)=tr(BCA)$ حيث ان 1.1.4

غير معرف CB لأن الضرب $tr(ABC)=tr(CBA)$ ومع ذلك فأنه غير صحيح بان well defined الضرب معرف تماماً والضرب BA غير معرف أيضاً .

$tr(I_s)=s$ 1.1.5

$tr(\Gamma^TA\Gamma)=tr(A)$ 1.1.6

ضرب كرونكر للمصفوفات [1] 1.2 The kronecker products of Matrices

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة من الدرجه $m\times n$ و Bمصفوفه من الدرجه $p\times q$ يعرف ضرب كرونكر للمصفوفتين B,A بانه مصفوفه من الدرجه $mp\times nq$ ويكتب .

$$A\otimes B=[a_{ij}B]$$

ان عملية ضرب كورنكر تمتلك عدة خواص من اهمها:-

خاصيه (1)

$$A\otimes 0=0\otimes A=0$$

1.2.1

خاصيه(2)

$$A\otimes(B+C)$$

2.2

خاصيه(3)

$$(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$$

1.2.3

خاصيه(4)

$$(aA)\otimes(bB)=(ab)(A\otimes B)$$

1.2.4

خاصيه(5)

$$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$$

1.2.5

حيث ان عملية الضرب الاعتيادي معرفه تماما

خاصيه(6)

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

1.2.6

حيث ان المعكوس موجود

خاصيه(7)

$$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$$

1.2.7

خاصيه (8)

$$(A+B)\otimes(C+D)=(A\otimes C)+(A\otimes D)+(B\otimes C)+(B\otimes D)$$

1.2.8

خاصيه(9)

$$\left|A_{p\times p}\otimes B_{r\times r}\right|=|A|^r|B|^p$$

1.2.9

خاصيه(10)

$$tr(A\otimes B)=tr(A)tr(B)$$

1.2.10

حيث ان A,Bمصفوفات مربعة .

تعريف ضرب كورنكر للمصفوفات يمكن توسيعه لاكثر من مصفوفتين ومثل هذا الضرب يعرف يشكل تكراري (Recursively) وكما يلي لتكن A_{ij} مصفوفه من الدرجه $p_i\times q_i$ لكل i=1,2,3,------,s فان ضرب كرونكر للمصفوفات As---A2.A1 يعرف بالشكل الاتي.

$$\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}}Ai=\left[\overset{s-1}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i\right]\otimes A_s$$

ويكون مصفوفه من الدرجة $(\prod_{i=1}^{s})(\prod_{i=1}^{s}q_i)$

بعض القواعد الاساسيه لفضاء n الاقليدي.

2.The principle Basis of n Euclidean Space

يمكننا استخدام القواعد الاساسيه لفضاء nالاقليدي لكتابة المصفوفات .سوف نرمز لهذه القواعد بالرمز e وكما يلي :-

حيث ان e_i^s متجه من الدرجه $s\times 1$ وان جميع عناصره اصفارا عدا العنصر في الموقع i فانه واحد $e_i^s=[0.....010......0]^T$
.كما يمكن النظر الى e_i^s على انه العمود ذو الرتبه iللمصفوفه الاحاديه I_s . سنعبر عن المصفوفه $A=(a_{ij})$ من الدرجه $m\times n$ وباستخدام e وكما يلي:-

1)باستخدام الضرب الاعتيادي للمصفوفات

$$2.1.a\quad A=(a_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_i^m\otimes e_j^{n^T}$$

2) **باستخدام ضرب كرونكر للمصفوفات**

$$A=(a_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_i^m\otimes e_j^{n^T} \qquad 2.1.b$$

وكذالك يمكن التعبير عن حاصل الضرب الاعتيادي بين مصفوفتين B, A وباستخدام e علما ان A مصفوفه من الدرجه $m\times n$ و B مصفوفه من الدرجه $n\times q$ كما يلي:-

لتكن

$$A=(a_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}e^m{}_i\otimes^{n^T}{}_j$$

$$B=(b_{i'j'})=\sum_{i'=1}^{n}\sum_{j'=1}^{q}b_{i'j'}e_{i'}^n\otimes e_{j'}^{q^T}$$

فان

$$AB=\sum_{i=1}^{m}\sum_{i'=1}^{q}\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{jj'}\right]e_i^m\otimes e_{j'}^{q^T}$$
2.2

كما يمكن التعبير عن عملية ضرب كرونكر للمصفوفات باستخدام e كما يلي .

$$A\otimes B=\sum_{i=1}^{m}\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{q}a_{ij}b_{i'j'}(e^m{}_i\otimes e^p_{i'})\otimes(e^{n^T}{}_j\otimes e^{q^T}{}_{j'}) \qquad 2.3$$

عملية متجه المصفوفة[3] 3.vec Operator of Matrix

تعريف متجه المصفوفة vec of Matrix

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفه من الدرجة $m\times n$ يعرف $vec(A)$ بانه متجه من الدرجه $mn\times 1$ ويكتب على شكل

$$vec(A)=[a_{11}a_{21}\ldots a_{m1}a_{12}a_{22}\ldots a_{m2}\ldots a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn}]^T$$

من الممكن كتابة متجه المصفوفه A وذالك بترتيب صفوف A على شكل عمود واحد وذلك بكتابة الصفوف كاعمدة الواحد تحت الاخر وبالترتيب بدا من اول صف.هذا التكديس لعناصر A والذي يكون بموجب ترتيب الرموز التحتيه (lexicon order)وحسب تعريف متجه المصفوفه مكافى الى $vec(A^T)$. قبل التكلم عن بعض خواص عملية vec وبراهينها فاننا نحتاج الى معرفة كيفية كتابة عملية vec باستخدام القواعد الاساسية لفضاء n الاقليدي مع كل من المصفوفة وحاصل ضرب مصفوفتين و ضرب كرونكر للمصوفتين ولتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة. $vec(A)=[a_{11}a_{21}\ldots a_{m1}a_{12}a_{22}\ldots a_{m2}\ldots a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn}]^T$

$$=vec\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e^m{}_i\otimes e^{n^T}{}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e_j^n\otimes e^m{}_i \qquad 3.1$$

كما يمكن كتابة $vec(A)$ وبدون استخدام عملية ضرب كرونكر وكمايلي

$$vec(A)=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e^{mn}_{m(j-1)+i}\right)$$

3.2

ويمكن كتابة $vec(AB)$ كما يلي $vec(AB)=vec\left[\sum_{i=i}^{m}\sum_{j'=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj'}\right)e_{i}^{m}\otimes e_{j'}^{q^{T}}\right]=\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj'}\right)e_{j'}^{q}\otimes e_{i}^{m}$

3.3

كما يمكن كتابة $vec(A\otimes B)$ كما يلي $vec(A\otimes B)=vec\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{q}a_{ij}b_{i'j'}(e_{i}^{m}\otimes e_{i'}^{p})\otimes(e^{n^{T}}{}_{j}\otimes e^{q^{T}}{}_{j'})\right]$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i'=1}^{p}a_{ij}b_{i'j'}(e_{j}^{n}\otimes e_{j'}^{q})\otimes(e_{i}^{m}\otimes e_{i'}^{p})\right] \quad 3.4$$

فيما يلي ندرج عدد من الخواص التي تخص عملية vec حيث ان جميع الخواص عدا الاولى والسابعه لها علاقة بعملية ضرب كرونكر والعلاقتين السابعة والثامنه لهما علاقة مع اثر المصفوفة وهي كما يلي:

خواص عملية vec للمصفوفات

خاصية (1)الخاصيه الخطيه

$$vec(A+B)=vec(A)+vec(B)$$

خاصية (2)

ليكن x متجه عمودي من الدرجه $n\times 1$, y متجه عمودي من الدرجه $m\times 1$

$$vec(xy^{T})=y\otimes x \quad 3.1.2$$

خاصية (3)

لتكن A مصفوفه من الدرجه $m\times n$,C مصفوفه من الدرجه $m\times p$ و χ متجه من الدرجه $n\times 1$ γ ,متجه من الدرجه $m\times 1$

$$vec\left[(Ax)(y^{T}C)\right]=(C^{T}\otimes A)vec(xy^{T}) \quad 3.1.3$$

خاصيه (4)

لتكن C,B,A ثلاث مصفوفات من الدرجه $m\times n$, $p\times q$, $n\times p$ على التوالي فان .

$$vec(ABC)=(C^{T}\otimes A)vec(B) \quad 3.1.4$$

خاصيه (5)

لتكن A مصفوفه من الدرجه $m\times n$, B مصفوفه من الدرجه $n\times p$

$$vec(AB)=(I\otimes A)vec(B)=(B^{T}\otimes A)vec(I)=(B^{T}\otimes I)vec(A) \quad 3.1.5$$

خاصيه(6)

لتكن A مصفوفه مربعه غير معتله أي ان(معكوسها موجود) فان . .

$$vecA^{-1}=\left[(A^{-1})^{T}\otimes A^{-1}\right]vec(A) \quad 3.1.6$$

خاصيه (7)

$$tr(A^{T}B)=vec(A)^{T}vec(B) \quad 3.1.7$$

خاصيه (8)

$$tr(AX^{T}BXC)=(vecX)^{T}(A^{T}C^{T}\otimes B)vec(X)=(vecX)^{T}(A\otimes B^{T})vec(X) \quad 3.1.8$$

وفيما يلي برهان الخواص الثمانيه

خاصيه (1)

$$vec(A+B)=vec(A)+vec(B)$$

البرهان:

لتكن B,A مصفوفتان من الدرجه $m\times n$

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})$$
$$=a_{ij}+b_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})e^{m}_{i}\otimes e^{n^T}_{j}$$

باستخدام3.2 $\text{L.H.S}=vec(A+B)=vec\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+b_{ij})e^{m}_{i}\otimes e^{n^T}_{j}\right]$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})e^{n}_{j}\otimes e^{m}_{i}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e^{n}_{j}\otimes e^{m}_{i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}e^{n}_{j}\otimes e^{m}_{i}$$

$$=vec(A)+vec(B)$$

=R.H.S

خاصيه (2)

$$vec(xy^T)=y\otimes x$$

البرهان :-

ليكن x متجه عمودي من الدرجه$m\times 1$ y, متجه عمودي من الدرجه$n\times 1$

$$xy^T=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_n\end{bmatrix}=(x_iy_i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_ie^{m}_{i}\otimes e^{n^T}_{j}$$

$$\text{L.H.S}=vec(xy^T)=vec\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_ie^{m}_{i}\otimes e^{n^T}_{j}\right]$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}y_ix_ie^{n}_{j}\otimes e^{m}_{i}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=(y\otimes x)=\text{R.H.S}\_$$

خاصيه(3)

$$vec\left[(Ax)(y^TC)\right]=(C^T\otimes A)vec(xy^T)$$

البرهان :

لتكن A مصفوفه من الدرجه$m\times n$, Cمصفوفه من الدرجه $p\times q, x$ متجه عمودي من الدرجه$n\times 1$ y^T متجه صفي من الدرجه$1\times p$

$$Ax=\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e^{m}_{i}\otimes e^{n^T}_{j}\right]\left[\sum_{j=1}^{n}x_ie^{n}_{j}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\right]e_i^m$$

$$y^T B=\left[\sum_{i'=1}^{p}y_{i'}e_{i'}^{p^T}\right]\left[\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j'=1}^{q}b_{i'j'}e_{j'}^{p}\otimes e_{j'}^{q^T}\right]$$

$$=\sum_{j'=1}^{q}\left[\sum_{i'=1}^{p}y_{i'}b_{i'j'}\right]e_{j'}^{q^r}$$

$$(Ax)(y^T B)=\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i^m\right]\left[\sum_{j'=1}^{q}\left(\sum_{i'=1}^{p}y_{i'}b_{i'j'}\right)e_{j'}^{q^T}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j'=1}^{q}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\chi_j)(\sum_{i'=1}^{p}y_{i'}b_{i'j'})\right]e_i^m\otimes e_{j'}^{q^T}$$

$$L.H.S=vec\left[(Ax)(y^T C)\right]=\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\left(\sum_{i'=1}^{p}y_{i'}b_{i'j'}\right)\right]e_j^q\otimes e_i^m$$

$$=\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}b_{i'j'}a_{ij}x_j y_{i'}\right]e_{j'}^q\otimes e_i^m.1$$

$$=\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}b_{i'j'}a_{ij}x_j y_{i'}\right](e_{j'}^q\otimes e_i^m)(e_{i'}^{p^T}\otimes e_j^{n^T})(e_{i'}^p\otimes e_j^n)$$

$$=\sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}b_{i'j'}a_{ij}(e_{j'}^q\otimes e_i^m)(e_{i'}^p\otimes e_j^n)\right]\left[\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j}^{n}x_j y_i(e_{i'}^p\otimes e_j^n)\right]$$

$$=\left(C'\otimes A\right)vec\left(xy'\right)=R.H.S$$

خاصيه (4)

$$vec(ABC)=(C^T\otimes A)vec(B)$$

البرهان:-

لتكن A مصفوفه من الدرجه $m\times n$ و B صفوفه من الدرجه $n\times p$,C مصفوفه من الدرجه $p\times q$, ويمكن كتابة المصفوفه B بموجب

لذا فان

$$B(b_{ij})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}b_{ij}e_i^m e_j^{n^T}$$

$$ABC=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}b_{ij}(Ae_i^m)\cdot(e_j^{n^T}C)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}b_{ij}\left[(Ae_i^n)(C^T e_j^n)^T\right]$$

$$L.H.S=vec(ABC)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}b_{ij}vec\left[(Ae_i^m)(e_j^{n^T}C)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}(C^T \otimes A) vec(e^m{}_i \cdot e^{n^T}{}_j)$$

$$= (C^T \otimes A)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, vec(e^m{}_i \cdot e^{n^T}{}_j)$$

$$= (C^T \otimes A)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}(e^n_j \otimes e^m_i)$$

$$= \ (C^T \otimes A) vec(B)$$

= R.H.S

خاصية (5)

$$vec(AB) = (I \otimes A)vec(B) = (B^T \otimes A)vec(I) = (B^T \otimes I)vec(A)$$

لهذه الخاصيه سنعطي برهانا لاحد اطرافها مستندين على متجهات القواعد الاساسيه لفضاء n الاقليدي .

$$vec(AB) = (I \otimes A)vec(B)$$

البرهان:-

لتكن A مصفوفه من الدرجه $m \times n$, B مصفوفه من الدرجه $n \times p$ I ,مصفوفه احاديه من الدرجه $q \times q$

$$vec(B) = \sum_{j'=1}^{q}\sum_{j'=1}^{n} b_{j'j} e^q_{j'} \otimes e^n_j$$

$$vec(AB) = \sum_{j'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj'}\right] \cdot e^q_{j'} \otimes e^m_i \quad \text{3.3بموجب}$$

$$I \otimes A = \sum_{i'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j'=1}^{q}\sum_{j=1}^{n} S_{i'j'} a_{ij}(e^q_{i'} \otimes e^m{}_i)(e^{q^T}{}_{j'} \otimes e^{n^T}{}_j) = \quad 3.2 \quad \text{بموجب}$$

$$R.H.S = (I \otimes A)vec(B) = \left[\sum_{i'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j'=1}^{q}\sum_{j=1}^{n} S_{i'j'} a_{ij}(e^q_{i'} \otimes e^m{}_i)(e^{q^T}{}_{j'} \otimes e^{n^T}{}_j)\right]\left[\sum_{j'=1}^{q}\sum_{j=1}^{n} b_{jj'}(e^q_{j'} \otimes e^n_i)\right]$$

$$= \sum_{i'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j'=1}^{q}\sum_{j=1}^{n} S_{i'j'} a_{ij} b_{jj'}\right](e^q_{i'} \otimes e^m{}_i)(e^{q^T}{}_{j'} \otimes e^{n^T}{}_j)(e^q_{j'} \otimes e^n_j)$$

$$= \sum_{i'=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj'}\right](e^q_{j'} \otimes e^m{}_i)$$

$$= vec(AB)$$

= L.H.S

خاصية (6)

$$vec(A^{-1}) = \left[(A^{-1})^T \otimes A^{-1}\right] vec(A)$$

البرهان

باستخدام الخاصية4 مع A^{-1} عوضا عن كل من A ، C و A عوضا عن B حيث A^{-1} موجود فان:

$$vec(A^{-1}) = vec(A^{-1}AA^{-1})$$

$$= \left[(A^{-1})^T \otimes A^{-1}\right] vec(A)$$

خاصيه (7)

$$tr(A^T B) = vec(A)^T vec(B)$$

البرهان :

لتكن B,A مصفوفتين من الدرجه $n \times m$ فان

$$A^T B = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ij'} \right] (e_i^n \otimes e_i^{m^T})$$

وباخذ الاثرلطرفي العلاقه مع الاستفاده من كون $e_j^m e_{j'}^{m^T}$ يساوي واحدعندما $j = j'$ يساوي صفروخلاف ذالك نحصل على

$$tr(AB)^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ji}$$

$$= a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \ldots\ldots + a_{n1} b_{n1}$$

$$+ a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + \ldots\ldots + a_{n2} b_{n2}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} + \ldots\ldots + a_{nn} b_{nn}$$

$$(a_{11} + a_{21} + \ldots\ldots + a_{n1} a_{12} a_{22} \ldots . a_{n2} \ldots a_{1n} a_{2n} \ldots\ldots a_{nn}) \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (vecA)' \, vec(B)$$

خاصية **(8)** $tr(AX^T BXC) = (vecX)^T (AC^T \otimes B) vec(X) = (vecX)^T (CA \otimes B^T) vec(X)$

لبرهان العلاقة الاولى :-

$$tr(AX^T BXC) = (vecX)^T (A^T C^T \otimes B) vec(X)$$

$$L.H.S = tr(AX^T BXC) = tr(CAX^T BX)$$

$$= \left[vec(CAX^T B) \right]^T vec(X)$$

$$= \left[(CA \otimes B^T) vec(X) \right]^T vec(X)$$

$$= \left[vec(X) \right]^T (A^T C^T \otimes B) vec(X)$$

$$= \mathrm{R.H.S}$$

لبرهان العلاقة الثانية:-

$$tr(AX^T BXC) = (vecX)^T (CA \otimes B^T) vec(X)$$

$$L.H.S = tr(AX^T BXC) = tr(XCAX^T B$$

$$
\begin{aligned}
&= tr(B^T X A^T C^T X^T) \\
&= tr(A^T C^T X^T B^T X) \\
&= \left[vec(BXCA)\right]^T vec(X) \\
&= \left[(CA)^T \otimes B)vec(X)\right] vec(X) \\
&= \left[vec(X)\right]^T (AC \otimes B^T) vec(X) \\
&= R.H.S
\end{aligned}
$$

References:

[**1**] Gray bill, F.A.(1983). "Matrices with application in Statistics " .Wadsworth International Group, Belmont, California .

[**2**] Neudecker ,H.(1969).Some theorems on matrix differtiation With Special reference to kronecker matrix products".J. Amer. Staist. Assoc.64,953-963.

[**3**] Alsharifi,H.2005, "Using the n. Euclidean Space For Vec and Vech Operators For matrices With Applications" Msc thesis

[**4**] Henderson H .V.and Searle S.R. (1979). "Vec and Vech Operators For matrices, With some uses in Jacobians and multivariate statistics". The canadion Jornal of statistics Vol. 7, No.1,1979. pages 65-81..